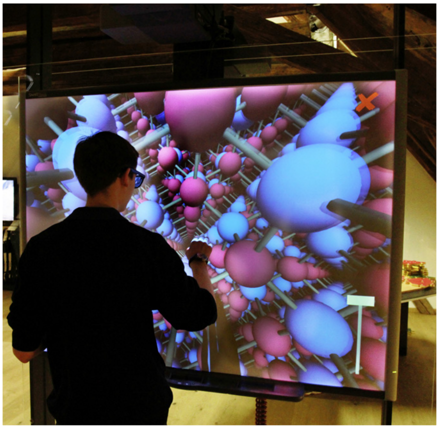


Einblicke in die Mathematik

Begleitheft zum mathematischen Teil der Ausstellung

Mit Links zum Download der Programme

Willkommen im MiMa!

Im mathematischen Teil der Ausstellung ist Anfassen ausdrücklich erwünscht! Entdecken Sie mathematische Zusammenhänge, indem Sie mit den Exponaten experimentieren.

Sie können zum Beispiel Ornamente erstellen, gekrümmte Flächen im Raum entwerfen, eigene Kristallformen virtuell erzeugen oder durch ein unendlich großes virtuelles Kristallgitter fliegen. Die Symmetrie, eine mathematische Grundeigenschaft von Kristallen, werden Sie in vielen Exponaten wieder finden. Wir zeigen Ihnen Objekte mit zweidimensionalen, dreidimensionalen und sogar vierdimensionalen Symmetrien. Außerdem werden Sie Bilder aus verschiedensten Bereichen der Mathematik sehen, von der algebraischen Geometrie und Differentialgeometrie bis hin zu dynamischen Systemen und Quasikristallen.

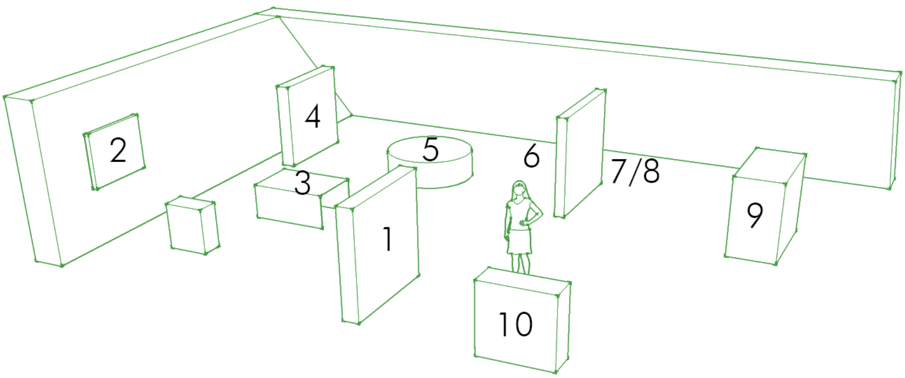
Hintergrundinformationen zu allen mathematischen Exponaten, den Programmen, den wissenschaftlichen Ideen und mathematischen Fachgebieten finden Sie in diesem Heft zum Nachlesen.

Die Exponate wurden gemeinsam mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Deutschland, Österreich, Belgien, Frankreich, den USA und Kanada für das MiMa entwickelt. Die Programme, die Sie im Museum finden, können Sie auch zu Hause verwenden. Entsprechende Hinweise und Links finden Sie in diesem Heft. Weitere Informationen zum Museum, den Veranstaltungen und Sonderausstellungen finden Sie auf unserer Webseite www.mima.museum.

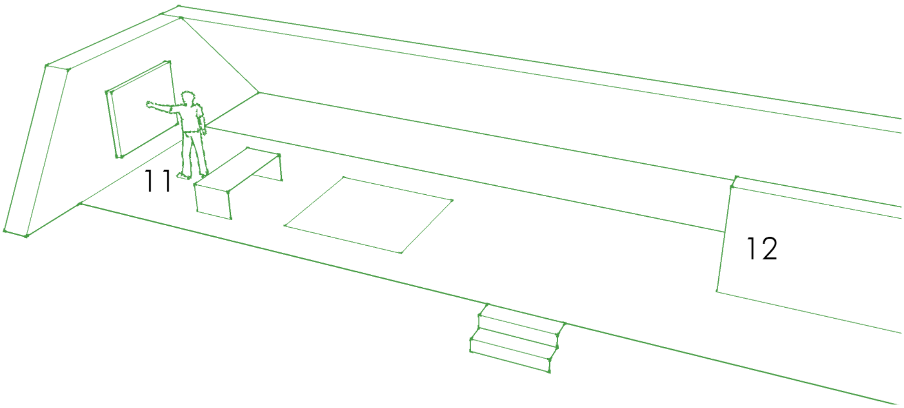
Viel Spaß auf Ihrer Entdeckungsreise durch die Wunderwelt der Mineralien und der Mathematik!

Überblick

Erster Stock



Galerie



1 MFO Geschichte

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO), eines der bekanntesten internationalen Forschungszentren für Mathematik, ist verantwortlich für den mathematischen Teil der Ausstellung im MiMa. Informationen zur Geschichte des Instituts und historische Bilder der letzten 60 Jahre finden Sie an dieser Station.

Das Institut wurde 1944 gegründet und ist seit 2005 Mitglied der Leibniz Gemeinschaft. Pro Jahr besuchen fast 3000 Forscherinnen und Forscher aus der ganzen Welt das Institut, um gemeinsam an wissenschaftlichen Fragen der Mathematik zu arbeiten.

Im Jahr der Mathematik 2008 entwickelte das MFO in enger Zusammenarbeit mit internationalen Mathematikerinnen und Mathematikern die Wanderausstellung IMAGINARY. Mit dieser Ausstellung war das Ziel verbunden, der Öffentlichkeit mathematische Hintergründe zugänglich zu machen und auf interaktive Weise zu erklären. Die Ausstellung war inzwischen in zahlreichen Städten weltweit zu sehen. Für das MiMa wurden Teile der Ausstellung übernommen und mit dem Schwerpunkt auf Verbindungen zur Kristallographie erweitert und angepasst.

Das Projekt IMAGINARY wurde inzwischen zu einer open source Plattform weiter entwickelt, auf der alle Interessierte mathematische Inhalte beitragen und herunterladen können.

Für weitere Nachforschungen:

www.mfo.de
www.imaginary.org

2 jReality

Mit jReality erleben Sie abstrakte mathematische Objekte in einer virtuellen dreidimensionalen Welt. Die sieben Skulpturen, die an dieser Station präsentiert werden, stammen aus dem Gebiet der Differentialgeometrie. Sie können die Figuren von allen Seiten betrachten und sogar in sie hinein klettern.

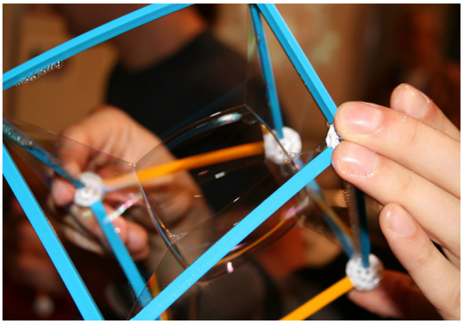
Aktivitäten

Mit Hilfe der Tasten und Knöpfe auf dem kleinen Podest können Sie sich in der virtuellen Welt bewegen. Mit den vorderen Tasten wechseln Sie zwischen den Flächen hin und her. Mit dem großen runden Knopf bewegen Sie sich um die Flächen herum. Durch vorsichtiges Drücken auf den Knopf heben Sie sogar ab. Erforschen Sie die Flächen ganz genau und versuchen Sie, ihren Besonderheiten auf den Grund zu gehen.

Die Mathematik dahinter

Die Differentialgeometrie beschäftigt sich mit der Krümmung von Formen. Es geht darum, die Eigenschaften von Kurven, gekrümmten Oberflächen oder sogar Formen mit mehr als drei Dimensionen mathematisch präzise zu beschreiben. Zu den Anwendungsfeldern der Differentialgeometrie gehören zum Beispiel die Kartografie, die Hydro- und Aerodynamik, die Berechnung von Flugbahnen, technische Verfahren zur plastischen Verformung, aber auch die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein.

Besonders interessant sind Flächen, die in dem Sinne optimal sind, dass ein genau festgelegtes „Qualitätsmaß" nicht verbessert werden kann, wenn man kleine Änderungen an der Fläche vornimmt. Dazu gehören beispielsweise Minimalflächen. Minimalflächen haben die gleichen Eigenschaften wie Seifenhäute. Eine Seifenhaut, die man



Durch Eintauchen eines Gittermodells in Seifenlösung entsteht eine Seifenhaut mit minimaler Oberfläche. Zuhause kann man das ganz einfach mit Blumendraht ausprobieren, den man zu verschiedenen Formen verbiegt.

durch Eintauchen eines gebogenen Drahtes in Seifenlösung erhält, hat die kleinste Oberfläche unter allen möglichen Flächen, die man in den Draht einspannen kann. Ihre sogenannte „mittlere Krümmung" an jedem Flächenpunkt ist Null. Seit den sechziger Jahren werden Minimalflächen als Modelle für leichte Dachkonstruktionen herangezogen, zum Beispiel für das Dach des Münchner Olympiastadions.

Mathematikerinnen und Mathematiker untersuchen auch deutlich komplexere Minimalflächen, die als Seifenhäute praktisch kaum mehr realisierbar sind. Betrachten Sie zum Beispiel die **Enneper Fläche**. Die Enneper Fläche ist eine Minimalfläche, die bis ins Unendliche weiter geht und sich dabei selbst durchdringt. In unserem Programm ist nur ein Ausschnitt der eigentlichen Fläche dargestellt. Können Sie abschätzen, wo es zu Überschneidungen kommt, wenn man die Fläche weiterführt?

Den **Helikoid** kennen Sie aus dem täglichen Leben von Wendeltreppen oder Parkhausauffahrten. Man kann die verschiedenen Etagen eines Helikoids durch „Henkel" miteinander verbinden und hat dennoch weiterhin eine Minimalfläche. Der hier dargestellte Helikoid hat zwei „Auffahrten". Überlegen Sie, ob Sie überall hinkommen, wenn Sie nur eine der Auffahrten benutzen. Macht es einen Unterschied, wenn Sie durch den Henkel springen?

Die **Schwarzsche Fläche** ist ebenfalls eine Minimalfläche. Sie hat eine periodische Struktur wie ein Kristallgitter. In unserem Programm wird sie nicht als eine glatte Fläche dargestellt, sondern durch viele sich berührende Kreisscheiben. Solche „Diskretisierungen" von Flächen spielen heute in der Architektur eine große Rolle, wenn es darum geht, gekrümmte Flächen aus vielen flachen Elementen zu bauen.

Der **Tetranoid** ist ein enger Verwandter der Minimalflächen. Seine mittlere Krümmung ist zwar nicht Null, aber sie ist an jedem Flächenpunkt konstant.

Der **Bär** steht im Original vor dem Mathematikgebäude der Technischen Universität Berlin (Matheon). Er stellt keine Minimalfläche dar. Das Interessante an ihm ist das Muster, mit dem er bemalt ist. Grundlage dafür ist ein periodisches Muster aus Kreisen und Matheon Logos auf einer Ebene. Die Herausforderung war, dieses Muster von der Ebene auf die gekrümmte Oberfläche des Bären so aufzubringen, dass die Formen möglichst wenig verzerrt werden. Dabei hilft die Differentialgeometrie. Achten Sie genau auf die Winkel im Muster! Man sagt: Die Abbildung des Musters auf den Bär ist „konform" zum Muster in der Ebene.

Die **Boysche Fläche** entsteht, wenn man den Rand einer Kreisfläche an den Rand eines Möbiusbandes klebt. Der deutsche Mathematiker Werner Boy (1879-1914) entdeckte sie im Jahr 1901. Die Boysche Fläche durchdringt sich selbst, sieht aber ansonsten in jedem ihrer Punkte glatt aus. Die hier gezeigte Variante ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Krümmung im Mittelwert so klein wie möglich ist.

Danksagung

Die Flächen wurden von Prof. Dr. Ulrich Pinkall und Prof. Dr. Steffen Weissmann (TU Berlin, Matheon) zusammengestellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-jreality
www.matheon.de

3 Carpark

Carpark ist ein spannendes Logikspiel. Die Aufgabe ist es, das rote Cabrio aus einem Parkstau zu befreien, indem Sie die Autos nur vorwärts und rückwärts verschieben, aber nicht heben oder seitwärts verstellen.

Aktivitäten

Über dem Spielbrett finden Sie Karten mit verschiedenen Ausgangssituationen. Sie sind nach Schwierigkeitstufen sortiert. Suchen Sie sich eine aus, bauen Sie die Ausgangssituation nach und versuchen Sie dann das rote Auto auszuparken.

Die Mathematik dahinter

Mathematikerinnen und Mathematiker knobeln auch gern. Aber sie beginnen sofort sich zu fragen, woran man erkennen kann, ob so ein Problem lösbar ist und in wie vielen Schritten. Man kann das Spiel mathematisch modellieren und die möglichen Lösungswege finden, zum Beispiel die Lösung mit den wenigsten Verschiebungen. Solche Fragen werden in der Optimierung, der Kombinatorik und der Spieltheorie betrachtet, die viele Anwendungen in Technik und Wirtschaft haben.

Wenn Sie zu Hause weiterknobeln möchten, fragen Sie in unserem Museumsshop nach dem Spiel „Rush Hour".

Danksagung

Das Exponat wurde von der Firma Geiger Raumkonzepte in Oberwolfach speziell für das MiMa gebaut.

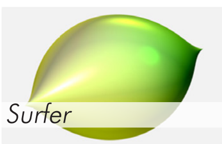
Für weitere Nachforschungen:

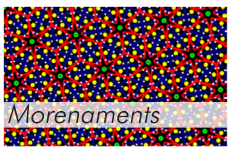
www.mima.museum/mathematik-carpark

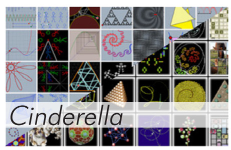
4 Entdeckerbox

Die IMAGINARY-Entdeckerbox ist ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, gefördert durch die Klaus Tschira-Stiftung. Die Box beinhaltet eine Sammlung an verschiedenen Ideen, Programmen, Filmen und Bildern, die zum Entdecken und Experimentieren mit Mathematik anregen sollen. Sie ist über die Plattform www.imaginary.org erhältlich. Die Programme und Filme der Entdeckerbox können Sie hier im MiMa anschauen und ausprobieren.

Die Programme Morenaments, Cinderella und Surfer finden Sie im MiMa nochmals an den Stationen 6, 7 und 11. Cinderella bieten wir in unterschiedlichen Versionen mit jeweils unterschiedlichen Inhalten an. Die ausführlichen Beschreibungen zu Morenaments, Cinderella und Surfer finden Sie weiter hinten in diesem Heft. Auf den folgenden Seiten stellen wir Ihnen „3D-Xplor-Math", „Karten der Erde", „Dune Ash", „Die Zukunft der Gletscher" sowie „Flaschen und Ozeanografie" vor.

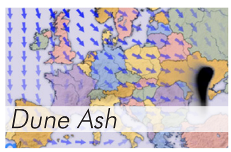

Surfer


Morenaments


Cinderella


3D-Xplor-Math


Karten der Erde


Dune Ash

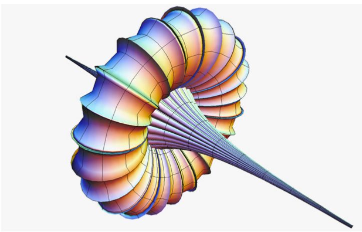

Die Zukunft der Gletscher


Flaschen und Ozeanografie

4a Entdeckerbox – 3D-XplorMath

Mit 3D-XplorMath lassen sich 2D- und 3D-Visualisierungen aus verschiedenen mathematischen Gebieten erforschen. Eine große Anzahl an Objekten und damit verbundenen Prozessen steht zur Verfügung.

Aktivitäten



Aufgrund der Vielfältigkeit des Programms geben wir hier nur eine kurze Einführung in die Bedienung: Wählen Sie aus dem Menü „Galerie" am oberen Bildschirmrand zunächst eine Kategorie aus, z.B. Kurven, Flächen, Fraktale oder Differentialgleichungen. Es erscheint dann ein weiteres Menü, aus dem Sie eines von den zahlreichen mathematischen Objekten auswählen können. Sie können das Objekt mit dem Finger drehen und von allen Seiten betrachten. In den Menüs „Aktionen" und „Einstellungen" finden Sie weitere Möglichkeiten um das Objekt zu verändern. Mit dem Menü „Animation" können sie sich verschiedene Prozesse berechnen und anzeigen lassen.

Danksagung

3D-XplorMath wird vom 3DXM-Consortium, einer internationalen Gruppe von Mathematikerinnen und Mathematikern, entwickelt (siehe www.3d-xplormath.org/consortium.html).

Für weitere Nachforschungen:

www.3d-xplormath.org

4b Entdeckerbox – Karten der Erde

Es ist nicht möglich, die Erdoberfläche ohne Verzerrungen auf eine ebene Weltkarte abzubilden. Das hat bereits Carl Friedrich Gauß bewiesen. Für die Kartografie bedeutet dies, dass es keine perfekten Karten geben kann. Man muss sich jeweils entscheiden, ob man für einen bestimmten Zweck eine winkeltreue, eine flächentreue oder eine längentreue Abbildung benötigt. In „Karten der Erde" können Sie sechs unterschiedlichen Abbildungen erforschen und miteinander vergleichen.

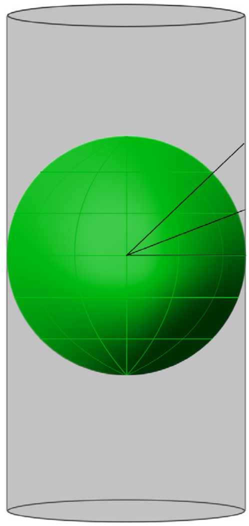
Aktivitäten

Öffnen Sie das Programm „Karten der Erde", indem Sie es auf dem Bildschirm antippen. Wählen Sie im oberen Bereich des Programms die verschiedenen Projektionen aus und betrachten Sie diese. Achten Sie auf den Flächeninhalt und den Umfang der einzelnen Kontinente. Was fällt Ihnen auf?

Wenn Sie mit dem Finger auf die Karte tippen, wird an diesem Punkt eine sogenannte Verzerrungsellipse angezeigt. Eine rote Färbung der Ellipse bedeutet eine starke Verzerrung an dieser Stelle. Eine grüne Färbung zeigt an, dass es kaum Abweichungen vom ursprünglichen Kreis gibt. Ist die Abbildung winkeltreu, dann sind alle Verzerrungsellipsen Kreise. Ist die Abbildung flächentreu, dann haben alle Verzerrungsellipsen den gleichen Flächeninhalt. Ist die Abbildung längentreu, dann haben alle Verzerrungsellipsen in Richtung der Längentreue gleich lange Halbachsen. Meist sind Abbildungen nur entlang der Breiten- oder Längenkreise längentreu.

Die Mathematik dahinter

Für ebene und gekrümmte Oberflächen gelten unterschiedliche geometrische Gesetze. In der Ebene ist zum Beispiel die Winkelsumme in Dreiecken immer 180°. Ein Dreieck auf einer Kugeloberfläche (Sphäre) hat jedoch eine größere Winkelsumme. Wenn man versucht ein Dreieck von einer Kugeloberfläche auf eine Ebene abzubilden, muss man die Abstände der Ecken oder die Winkel im Dreieck verzerren.



Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Abbildungen entwickelt, die Abstände und Winkel auf unterschiedliche Weise verzerren. Betrachten Sie als Beispiel die Zylinderprojektion rechts, das Grundprinzip der Mercatorprojektion. Um den Globus der Erde wird gedanklich ein Zylinder gelegt. Der Zylinder berührt den Globus am Äquator. Vom Mittelpunkt des Globus aus zieht man nun gerade Linien durch jeden Punkt der Oberfläche. Dort wo die Linien auf den Zylinder treffen wird der entsprechende Punkt abgebildet. Zum Schluss wird der Zylinder aufgerollt und man erhält eine ebene Karte der Erdoberfläche. Am Äquator ist die Abbildung verzerrungsfrei, doch je weiter man sich davon entfernt, desto größer werden die Verzerrungen von Längen und Flächen.

Anstelle des Zylinders lassen sich auch andere Hilfskörper, wie z.B. Kegel verwenden. Daraus ergeben sich dann andere Abbildungen mit anderen Verzerrungseigenschaften.

Danksagung

Das Programm „Karten der Erde" wurde von Dr. Daniel Ramos vom Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) entwickelt.

Für weitere Nachforschungen:

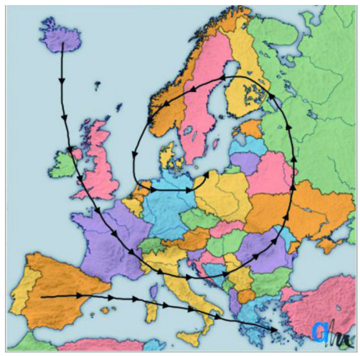
www.imaginary.org/program/the-sphere-of-the-earth

4c Entdeckerbox – Dune Ash

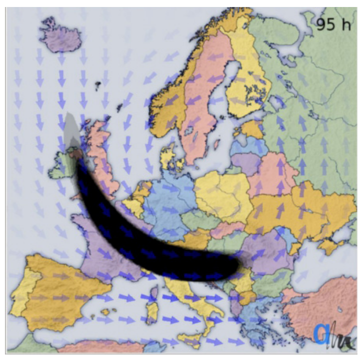
Im Mai 2011 brach der Vulkan Grimsvötn auf Island aus. Die entstandene Aschewolke verursachte die Schließung des Luftraums in Skandinavien und Schottland und beinträchtigte den Luftraum in ganz Europa. Das Programm Dune Ash simuliert, wie sich eine solche Aschewolke ausbreitet. Sie können den Standort des Vulkans und die Windverhältnisse vorgeben und anschließend beobachten, wie sich die Asche vom Moment des Ausbruchs an über Europa verteilt.

Aktivitäten

Rufen Sie auf dem Bildschirm der Entdeckerbox das Programm „Dune Ash" auf. Positionieren Sie einen Vulkan irgendwo in Europa, indem Sie auf die entsprechende Stelle des Bildschirms tippen. Bewegen Sie sich dann mit dem Pfeilknopf durch die weiteren Schritte.



Skizzieren Sie als nächstes ein Windfeld, indem Sie auf dem Bildschirm Linien einzeichnen. Die Windgeschwindigkeit ergibt sich aus der „Malgeschwindigkeit". Basierend auf den gezeichneten Linien wird ein Windfeld über ganz Europa berechnet und angezeigt. Die blauen Pfeile vermitteln einen Eindruck der Windgeschwindigkeiten: eine helle Färbung steht für niedrige Geschwindigkeit, eine dunkle Färbung für hohe Geschwindigkeit. Für die Dauer der Simulation bleibt das Windfeld konstant. In der Realität könnten sich die Winde durchaus ändern.



Die Verteilung der Asche wird zusätzlich durch eine Diffusionskonstante bestimmt. Sie beruht auf zufälligen Bewegungen der Ascheteilchen aufgrund ihrer thermischen Energie. Wie stark der Einfluss der Diffusion in der Simulation sein soll, legen Sie im nächsten Schritt über einen Schieberegler fest.

Anschließend berechnet das Programm die Ausbreitung der Aschewolke und zeigt sie auf dem Bildschirm an. Mit „Start/Pause" kann die Animation unterbrochen werden, „Stopp" beendet die Simulation. Mit dem Schieberegler unten rechts lässt sich der Zustand zu verschiedenen Zeitpunkten anzeigen.

Die Mathematik dahinter

Simulationen von komplexen physikalischen Vorgängen sind ein wichtiger Forschungsbereich in der angewandten Mathematik. Sie werden zum Beispiel für die Wettervorhersage benötigt oder für die Berechnung der Verbreitung von Schadstoffen in der Atmosphäre. Solche Vorgänge können von vielen unterschiedlichen Parametern beeinflusst werden.

Mathematikerinnen und Mathematiker beschreiben zunächst die Modelle dieser Vorgänge durch Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren Variablen. Die Gleichungssysteme werden umso komplexer, je genauer man sich der Realität annähern möchte und je mehr Parameter dabei berücksichtigt werden. Sie anschließend am Computer mit mathematischen Algorithmen zu lösen ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Häufig können die Lösungen nur näherungsweise bestimmt werden.

Für die Simulation der Ascheverbreitung in Dune Ash lautet die zu lösende partielle Differentialgleichung:

$$\partial_t c + \nabla \cdot (\omega\, c) - \varepsilon \Delta c = \upsilon(t, x)$$

$\partial_t c$ beschreibt die Veränderung der Aschekonzentration über die Zeit. Die Konzentration wird von mehreren Parametern beeinflusst. Der Ausdruck $\nabla \cdot (\omega\, c)$ steht für den Einfluss des Windes und $\varepsilon \Delta c$ für den Einfluss der Diffusion. Mit der Funktion $\upsilon(t, x)$ wird der Vulkanausbruch modelliert, der zu einem Zeitpunkt t und an einem Ort x stattfindet.

Danksagung

Dune Ash wurde am Institut für Mathematik der Universität Freiburg unter der Leitung von Prof. Dr. Dietmar Kröner entwickelt. Das Programm verwendet das modulare Programmpaket „Dune" zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen.

Für weitere Nachforschungen:

www.imaginary.org/program/dune-ash
www.dune-project.org

4d Entdeckerbox – Die Zukunft der Gletscher

Die Alpengletscher schrumpfen seit mehr als einem Jahrhundert. Man erwartet, dass dieser Trend anhält, solange die globale Erwärmung fortschreitet. Doch wie kann man realistische Vorhersagen über die Entwicklung von Gletschern treffen? Der Film zeigt, wie Mathematiker mit Gletscherforschern zusammenarbeiten.

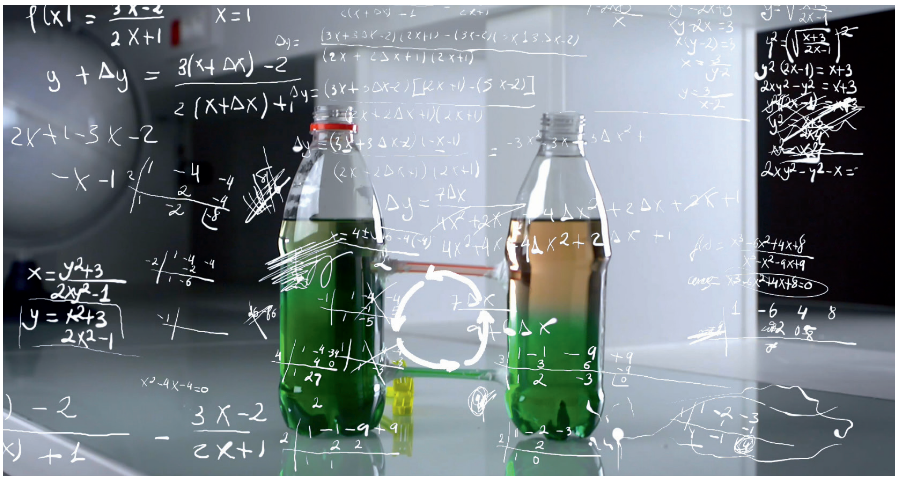
Danksagung

Der Film „Die Zukunft der Gletscher" wurde am Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin von Dr. Guillaume Jouvet, Dr. Chantal Landry, Dr. Antonia Mey, Prof. Dr. Marco Picasso, Prof. Dr. Jaques Rappaz, Dr. Mathias Huss, Prof. Dr. Heinz Blatter und Prof. Dr. Martin Funk erstellt.

Für weitere Nachforschungen:
www.imaginary.org/film/glacial-mystery

4e Entdeckerbox – Flaschen und Ozeanografie

Wie entstehen Meereströmungen? Ein Grund dafür sind die unterschiedlichen Dichten von warmen und kalten Wassermassen. Forscher verwenden Mathematik und Computer, um die Vorgänge präzise zu simulieren. Das grundlegende Konzept kann man aber auch mit einem einfachen Experiment zu Hause nachvollziehen. Der Film zeigt wie's geht!



Danksagung

Der Film „Flaschen und Ozeanografie" wurde von Dr. Antoine Rousseau, Dr. Maëlle Nodet, Dr. Sebastian Minjeaud und Pierre-Olivier Gaumin erstellt. Die deutsche Tonspur wurde von Susanne Gschwendtner und Lukas Ljubanovic aufgenommen.

Für weitere Nachforschungen:

www.imaginary.org/film/bottles-and-oceanography

5 Penrose Puzzle

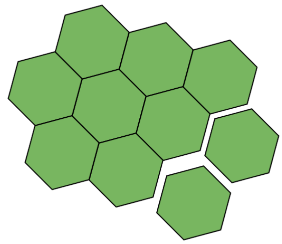
Welche Form darf eine Fließe haben, damit man mit ihr auf regelmäßige Weise einen Fußboden lückenlos und überschneidungsfrei bedecken kann? Ein mathematischer Satz besagt, dass dies nur mit Grundformen gelingt, die eine 1-, 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrie besitzen. Mit dem Penrose Puzzle kann man jedoch eine Ebene mit einem Muster aus 5-zählig symmetrischen Figuren bedecken. Das Muster ist unregelmäßig und kann theoretisch unendlich fortgesetzt werden. Der besondere Trick: Es werden zwei unterschiedliche Grundelemente verwendet.

Aktivitäten

Legen Sie die Puzzleteile so aneinander, dass der Tisch lückenlos bedeckt wird. Aufgrund der Form des Tisches werden Sie keine perfekte Übereinstimmung mit dessen Rand erreichen. Die Aufgabe ist nicht ganz leicht, denn ein einmal erkanntes Muster kann nicht einfach wiederholt werden. Das fertige Puzzle zeigt ein unregelmäßiges Muster, in dem immer wieder symmetrische Figuren auftauchen.

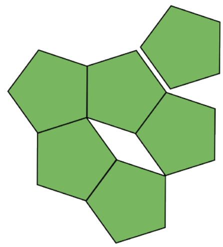
Die Mathematik dahinter

Mathematiker nennen eine lückenlose und überschneidungsfreie Bedeckung einer Ebene eine Parkettierung. Dabei wird das gleiche geometrische Grundelement – zum Beispiel ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck – periodisch, also regelmäßig und unendlich oft aneinander gelegt.



Ein Ausschnitt einer Parkettierung der Ebene mit Sechsecken.

Ein mathematischer Satz besagt, dass eine Ebene nur mit 1-, 2-, 3-, 4- oder 6-zählig symmetrischen Grundelementen parkettiert werden kann. Die Zähligkeit einer symmetrischen Figur misst man daran, wie viele Spiegelungen und Drehungen es gibt, welche die Figur mit sich selbst zur Deckung bringen. Ein gleichseitiges Dreieck hat zum Beispiel eine 3-zählige Symmetrie: Man kann es dreimal um 120° drehen und es sieht nach jeder Drehung genau gleich aus. Ein gleichseitiges Fünfeck hat eine 5-zählige Symmetrie. Mit ihm wäre es nach dem genannten Satz nicht möglich, eine Ebene zu parkettieren.



Beim Versuch einer Parkettierung mit gleichen Fünfecken entstehen Lücken.

Umso erstaunter war die Fachwelt, als 1974 der Mathematiker Prof. Dr. Roger Penrose dennoch eine Parkettierung der Ebene mit 5-zählig symmetrischen Figuren fand. Ein besonderer Kniff machte das Unmögliche möglich: Penrose kombinierte zwei verschiedene Vierecke anstatt nur ein einziges Grundelement zu verwenden. Er konnte mathematisch beweisen, dass sich die Ebene mit den beiden Grundelementen theoretisch unendlich auffüllen lässt. Dabei entsteht ein aperiodisches Muster, in dem immer wieder Abschnitte mit einer 5-zähligen Symmetrie auftauchen. Mit unserem Puzzle können Sie einen Ausschnitt einer solchen Parkettierung nachbauen.

Die Verbindung zur Kristallografie

Eine Parkettierung ist das zweidimensionale Gegenstück eines Kristalls. In den Atomgittern von Kristallen wiederholen sich die gleichen räumlichen Grundstrukturen immer wieder. Kennt man die Grundstruktur, so kann man damit den gesamten Aufbau eines Kristalls beschreiben. Sie können das an der Station 7 „Cinderella" genauer untersuchen.

Aufgrund des genannten mathematischen Satzes ging man in der Kristallografie lange Zeit davon aus, dass es keine 5-zählig symmetrischen Atomgitterstrukturen geben könne – trotz der Entdeckung von Penrose. Doch 1982 fand der Chemiker Prof. Dr. Dan Shechtman tatsächlich eine Legierung aus Aluminium und Magnesium, die eine solche Struktur aufweist. Er erhielt für seine Entdeckung 2011 den Nobelpreis für Chemie.

Heute sind Feststoffe mit dieser Struktur als Quasikristalle bekannt. Sie wurden inzwischen vielfach erforscht. In der Praxis dienen sie unter anderem dazu, eine besondere Sorte von Stahl herzustellen, denn sie sind besonders hart und spröde.

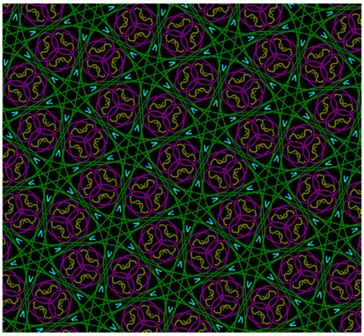
Danksagung

Das Penrose-Puzzle wurde vom Mathematikum Gießen gebaut und dem MiMa gesponsert.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-penrose

6 Morenaments

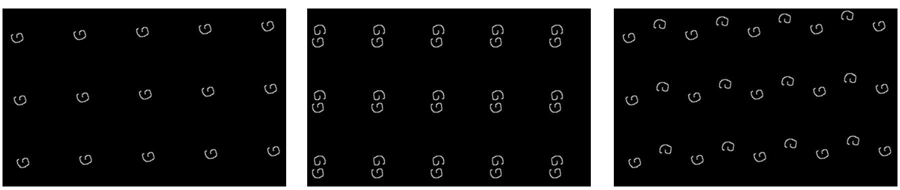


Mit dem Programm Morenaments können Sie mit einem selbst gemalten Grundmuster die Ebene parkettieren, das heißt, lückenlos und überschneidungsfrei ausfüllen. Sie erzeugen dadurch wunderschöne Ornamente, hinter denen eine ganze Menge Mathematik steckt!

Aktivitäten

Wählen Sie eine Farbe aus dem Auswahlfeld rechts unten, suchen Sie sich eine Stiftdicke aus und malen Sie mit dem Finger auf die schwarze Zeichenfläche. Beobachten Sie, wie das Grundmuster automatisch die Ebene füllt.

Es gibt nur 17 verschiedene Möglichkeiten, wie aus Ihrem Grundmuster ein Ornament entstehen kann. Auf der linken Seite können Sie auswählen, welche von den 17 Möglichkeiten angewendet wird. Im einfachsten Fall, mit dem Knopf ganz oben links, wird das Grundmuster einfach nur verschoben. Mit dem zweiten Knopf vollführt es eine halbe Drehung. Beobachten Sie, was passiert, wenn Sie die anderen Knöpfe drücken. Es entstehen immer komplexere Muster durch Kombinationen aus Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen des Grundmusters.



Variationen mit dem gleichen Grundmuster: Verschiebung, halbe Drehung sowie eine Kombination aus Verschiebung und Drehung.

Das Ornament kann theoretisch unendlich weit fortgesetzt werden, indem ein bestimmter Ausschnitt, eine „Kachel", immer wieder verschoben und aneinandergelegt wird. Auf der rechten Seite des Bildschirms sehen Sie die Kachel Ihres Ornaments. Sie können die Größe der Kachel verändern, indem Sie an den Eckpunkten ziehen.

Die Mathematik dahinter

Ornamente sind für die Mathematik interessant, weil sie hochsymmetrische Gebilde sind. Im alltäglichen Sprachgebrauch wird der Begriff Symmetrie häufig mit der Achsensymmetrie oder auch Spiegelsymmetrie gleichgesetzt. In der Mathematik werden jedoch auch Drehungen und Verschiebungen als Symmetrieoperationen betrachtet. Der berühmte Mathematiker Prof. Dr. Hermann Weyl erklärte Symmetrie folgendermaßen: „Symmetrisch ist ein Gebilde dann, wenn man es irgendwie verändern kann und im Ergebnis das Gleiche erhält."

Betrachten Sie wieder die Kachel auf der rechten Seite des Bildschirms, die Ihr Grundmuster in verschiedenen gedrehten oder gespiegelten Versionen enthält. Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diese Kachel durch Drehungen oder Spiegelungen in sich selbst zu überführen? Vielleicht sehen Sie eine oder mehrere Spiegelachsen oder einen Punkt, um den Sie die Kachel in mehreren Schritten drehen könnten. Die Menge all der Operationen, welche die Kachel in sich selbst überführen, nennt man in der Mathematik eine Symmetriegruppe.

Mathematisch lässt sich beweisen, dass es genau 17 verschiedene Symmetriegruppen von periodischen Mustern oder Parkettierungen der Ebene gibt. Das bedeutet, dass jedes regelmäßige Flächenornament genau zu einem der 17 verschiedenen Grundmuster gehört.

Die Symmetriegruppen werden häufig mit Buchstaben und Ziffern abgekürzt (p1, p2, pm, pg etc.). Sie weisen auf die enthaltenen Symmetrieoperationen der Gruppe hin. Eine Ziffer steht zum Beispiel für ein Drehzentrum mit entsprechender Zähligkeit, ein m für eine Spiegelachse und ein g für eine Gleitspiegelachse. Die Reihenfolge der Buchstaben und Ziffern sagt etwas über die Lage der Symmetrien zueinander aus.

Die Araber kannten diese Symmetriegruppen bereits im Mittelalter. In der Alhambra, einer Festungsanlage in der spanischen Stadt Granada, findet man sie alle in den arabischen Wandornamenten wieder.

Ornament in der Wanddekoration der Alhambra

Auf englisch heißen die 17 Symmetriegruppen periodischer Muster übrigens „wallpaper groups" – Tapetengruppen. Woher der Name wohl kommt?

Die Verbindung zur Kristallografie

Die 17 Symmetriegruppen von periodischen Mustern bezeichnet man auch als zweidimensionale kristallografische Gruppen. In jeder Schnittfläche eines Kristalls folgen die Atome den Anordnungsregeln einer dieser 17 Gruppen. Betrachtet man nicht nur die Schnittflächen, sondern ganze, dreidimensionale Kristalle wird es komplizierter. Denn für dreidimensionale regelmäßige Muster gibt es 230 kristallografische Raumgruppen.

Danksagung

„Morenaments" wurde von Dr. Martin von Gagern entwickelt und dem MiMa kostenfrei zur Verfügung gestellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-morenaments
www.morenaments.de

7 Cinderella

An der Station Cinderella finden Sie eine Sammlung von 24 Programmen, mit denen Sie Experimente zu mathematischen und physikalischen Themen durchführen können. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Verbindung zur Kristallografie.

Aktivitäten

Tippen Sie auf eines der 24 Bilder, um ein Programm zu öffnen. Mit dem Balken auf der rechten Seite können Sie nach unten scrollen, um eine Erklärung zu dem Programm zu erhalten. Um zurück ins Hauptmenü zu kommen, tippen Sie mit dem Finger auf die Menüleiste. Hier können Sie auch zur Station 8, Curved Spaces, wechseln, die am selben Bildschirm zur Verfügung steht.

Danksagung

Die 24 Programme wurden von Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert speziell für das MiMa entworfen und mit Cinderella programmiert. Cinderella ist ein Programm für mathematische Experimente von Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert und Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-cinderella
www.cinderella.de

8 Curved Spaces

Mit Curved Spaces fliegen Sie durch virtuelle Atomgitter von Kristallen und vierdimensionale Räume. Als wären Sie ein Pilot in einem Nano-Jet können Sie dadurch den Aufbau der Gitter von innen erkunden.

Aktivitäten

In der rechten Spalte des Menüs können Sie einen von mehreren virtuellen 3D-Flügen auswählen. Drei der vorhandenen Flüge bilden die atomare Struktur von Kristallen ab: Fluorit, Quartz und Diamant. Tippen Sie auf eines der Symbole, setzen Sie eine 3D-Brille auf und schon geht's los.

Der Hebel rechts unten erlaubt es Ihnen, die Geschwindigkeit des Flugs einzustellen. Die Flugrichtung können sie beeinflussen, indem Sie mit der Hand über die Projektionsfläche fahren. Mit dem „X"-Knopf können Sie die Flüge wieder schließen und gelangen zurück in das Hauptmenü.

Natürlich sehen die Atome in Wirklichkeit nicht wie farbige Kugeln aus, die mit Stäben verbunden sind. Das ist nur ein einfaches Modell. Dadurch ist jedoch gut zu erkennen, dass die Atome in einer gitterartigen Struktur angeordnet sind und sich ihre Anordnung in einer konstanten Richtung permanent wiederholt. Durch verschiedene Flugrichtungen können Sie auch gut die Symmetrieebenen der Kristalle erforschen.

Der vierte Flug ist eine mathematische Besonderheit. Es handelt sich um einen vierdimensionalen Raum aus 120 dreidimensionalen Dodekaedern. Der Raum ist in sich geschlossen, das heißt er hat keinen Rand. Wenn man an einem Ende hinausfliegt, kommt man automatisch an der gegenüberliegenden Seite wieder hinein. Man kann sich das ähnlich vorstellen, wie wenn man auf einer Kugeloberfläche immer in eine Richtung geht: Irgendwann kommt man automatisch wieder zur selben Stelle.

Danksagung

Dieses Exponat wurde von Dr. Jeff Weeks speziell für das MiMa geplant und programmiert. Es basiert auf seinem freien Programm Curved Spaces, das im Internet kostenlos erhältlich ist.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-cinderella
www.geometrygames.org

9 Skulpturen

In der Vitrine finden Sie 3D-Drucke platonischer, archimedischer und catalanischer Körper – dreidimensionale symmetrische Figuren, die für die Kristallografie eine wichtige Rolle spielen. Außerdem zeigen wir Ihnen platonische Sterne sowie einige ausgewählte mathematische Objekte aus Glas: das Möbiusband, die Kleinsche Fläche und eine Interpretation der Boyschen Fläche. Auf der untersten Ebene finden Sie zusätzlich die Projektion eines vierdimensionalen Dodekaeders in den dreidimensionalen Raum.

Platonische Körper

Platonische Körper sind vollkommen regelmäßige, konvexe Körper, deren Oberflächen aus gleich großen, gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken bestehen. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. Von diesen Körpern gibt es nur fünf verschiedene: Tetraeder, Hexaeder (Würfel, Kubus), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Ihre Eigenschaften wurden bereits in der Antike studiert. Der griechische Philosoph Platon, nach dem die Körper benannt sind, beschrieb sie ausführlich in seinem Werk *Timaios*.

In der Kristallografie spielen die platonischen Körper eine wichtige Rolle, weil die Kristalle einiger Mineralien exakte Hexaeder oder Oktaeder bilden oder fast exakte Tetraeder und Dodekaeder.

Archimedische Körper

Die Oberflächen der 13 archimedischen Körper bestehen aus unterschiedlichen gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. Archimedische Körper können zum Beispiel aus den platonischen Körpern konstruiert werden, indem man die Ecken der platonischen Körper so abschneidet, dass an jeder Ecke ein regelmäßiges Vieleck entsteht. In der Natur treten viele archimedische Körper ebenfalls als Kristallformen auf.

Ein ganz bestimmter archimedischer Körper ist Ihnen wahrscheinlich bereits bekannt: Will ein Schuster einen Fußball nähen, so nimmt er dazu zwölf regelmäßige Fünfecke und zwanzig regelmäßige Sechsecke. An drei der Kanten eines Sechsecks näht er ein anderes Sechseck, an den anderen drei Kanten nimmt er statt dessen jeweils ein Fünfeck. Mathematisch nennt man das einen Ikosaederstumpf.

Wenn man von einem Ikosaeder die Ecken abschneidet ensteht genau diese Form. Probieren Sie es an der Station 7, Cinderella, selbst aus!

Catalanische Körper

Nimmt man die Mittelpunkte von den Seitenflächen der archimedischen Körper und verbindet sie, dann erhält man jeweils einen catalanischen oder *dual-archimedischen* Körper. Alle Seitenflächen der catalanischen Körper sind deckungsgleich zueinander, aber sie sind nicht regelmäßig. Ihre Seitenlängen sind unterschiedlich. Es verhält sich also genau umgekehrt wie bei den archimedischen Körpern.

Auch die catalanischen Körper sind sehr wichtig für die Kristallografie. Das Rhombendodekaeder ist zum Beispiel eine typische Kristallform. Sie kommt bei Mineralien der Granatgruppe vor.

Platonische Sterne

Mathematiker der Universität Wien berechneten die Formeln von algebraischen Flächen mit dem passenden Namen „Platonische Sterne“. Besondere Spitzen, bei Mathematikern unter dem Namen A_2-Singularität bekannt, kommen in ihnen jeweils genau in den Ecken eines platonischen Körpers zu liegen. Der Hexaederstern hat also wie der Würfel acht Spitzen. Und wie den Würfel kann man ihn auf 24 verschiedene Arten drehen, ohne dass Ausgangslage und Ergebnis voneinander unterscheidbar sind. Platonische Sterne gehorchen damit denselben Regeln der Symmetrie wie die platonischen Körper.

Glasobjekte

Bei den Glasobjekten handelt es sich um besondere Flächen. Die ersten beiden sind nicht orientierbare Flächen, das heißt sie besitzen nur eine Seite. Beginnt man an einem beliebigen Punkt und fährt mit dem Finger über die Fläche, so gelangt man ohne Übergang von „innen“ nach „außen“ und umgekehrt.

Das **Möbiusband** ist wahrscheinlich die bekannteste der drei ausgestellten Flächen. Es wurde nach dem deutschen Mathematiker und Astronom August Ferdinand Möbius (1790-1868) benannt. Sie können ein Möbiusband leicht selbst herstellen, indem Sie einen Papierstreifen ringförmig zusammenkleben und vorher ein Ende um 180° drehen.

Die **Kleinsche Fläche** erinnert an die Form einer Flasche, bei der der Flaschenhals an einer Stelle die Flasche durchdringt. Sie ist nach dem deutschen Mathematiker Felix Klein (1849-1925) benannt. Wie würde es wohl aussehen, wenn Sie in diese Flasche Wasser füllen würden?

Die dritte Fläche ist **eine Fläche vom Geschlecht 3.** Man bezeichnet sie so, weil sie drei „Henkel" hat. Es handelt sich um die Verschmelzung dreier Torusflächen.

Danksagung

Die platonischen Körper wurden von der Augsburger Firma Voxeljet Technology dreidimensional aus Kunststoff ausgedruckt. Die archimedischen und catalanischen Körper wurden von Dr. Oliver Labs erstellt.

Die Idee zu den platonischen Sternen stammt von Prof. Dr. Herwig Hauser und seinem Team an der Universität Wien. Die Gleichungen wurden unter anderen von Alexandra Fritz, einer österreichischen Mathematikerin, gefunden. Die 3D-Daten hat das Institut Forwiss der Universität Passau für das MiMa erstellt. Die Skulpturen wurden schließlich von der Firma Voxeljet Technology gedruckt.

Die Glasobjekte wurden von der Firma Dorotheenhütte – Glashütte Wolfach für das MiMa erstellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-skulpturen

10 Doppelpendel

Sie glauben zu wissen, wie sich ein Pendel verhält? Unser Doppelpendel stellt alles auf den Kopf. Es vollführt die aberwitzigsten Bewegungen, deren genauer Ablauf nicht vorhersagbar ist. Die Untersuchung solcher Phänomene ist in der Mathematik als „Chaosforschung" in die Geschichte eingegangen.

Aktivitäten

Bringen Sie das Doppelpendel mit dem Drehknopf in der Mitte zum Schwingen und beobachten Sie was passiert. Experimentieren Sie zunächst mit unterschiedlichen Ausgangsbedingungen. Versuchen Sie anschließend zweimal hintereinander mit den gleichen Bedingungen zu starten. Wie verhält sich jeweils das Pendel?

Die Mathematik dahinter

In der Schule lernt man im Physikunterricht vor allem solche mechanische oder elektrische Systeme kennen, die ein einfaches Schwingungsverhalten aufweisen, wie zum Beispiel ein einfaches Pendel. Seine Bewegung kann man sehr leicht vorhersagen: Es pendelt hin und her und irgendwann hört es wieder damit auf. Wenn man den Luftwiderstand, die Reibungskräfte und andere beeinflussende Größen kennt, kann man den genauen Bewegungsablauf mit Hilfe einer gedämpften Sinusschwingung mathematisch beschreiben und die Höhe der Ausschläge sowie die Dauer des Pendelvorgangs berechnen.

Für unser Doppelpendel gilt das nicht. Zwar lässt sich der Bewegungsablauf durch ein System von Differentialgleichungen mathematisch beschreiben, aber dieses Gleichungssystem kann lediglich näherungsweise für bestimmte Ausgangswerte gelöst werden. Es gibt keine Möglichkeit die Bewegung bei beliebigen Startbedingungen längerfristig vorherzusagen. Schon minimale Änderungen der Startbedingungen können gewaltige Unterschiede im Bewegungsablauf auslösen. Das liegt daran, dass sich die beiden Pendel in ihren Bewegungen gegenseitig beeinflussen und minimale Abweichungen exponentiell verstärkt werden können.

Systeme mit solchem Verhalten werden als „chaotische" Systeme bezeichnet. Im Gegensatz zur Verwendung in der Umgangssprache bedeutet „chaotisch" in der Mathematik nicht die Abwesenheit jeglicher Ordnung. Chaotische Systeme sind mathematisch beschreibbar und verhalten sich prinzipiell deterministisch, das heißt sie werden nicht vom Zufall bestimmt. Es ist in der Praxis jedoch unglaublich schwierig, zweimal das gleiche Ergebnis zu erzielen oder ein längerfristiges Ergebnis vorherzusagen, weil diese Systeme so empfindlich auf winzige Änderungen reagieren.

In der Natur kommen chaotische Systeme häufig vor, z.B. in der Metereologie (Wettervorhersage), Astronomie (Dreikörperproblem) und Medizin (Herzschlagarrythmien). Sie kennen bestimmt die Metapher vom Schmetterling, der mit seinem Flügelschlag am Bodensee einen Wirbelsturm in Australien auslösen kann. In Anlehnung an diese Metapher spricht man auch vom Schmetterlingseffekt: Kleinste Veränderungen der Startbedingungen führen zur gewaltigen Änderungen des Ergebnisses. Die mathematische Untersuchung solcher Systeme ist ein schwieriges und aktives Forschungsgebiet.

Danksagung

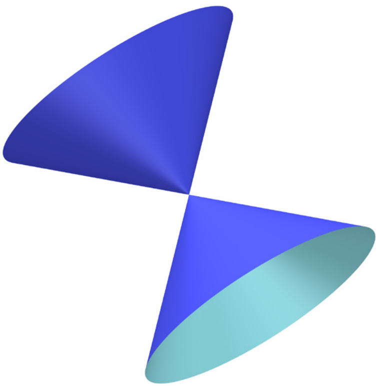
Dieses Exponat wurde von der Firma A2 Metallbau Armbruster in Oberwolfach geplant, designed, gebaut und dem MiMa gesponsert.

Für weitere Nachforschungen:

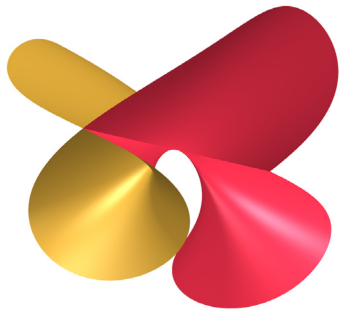
www.mima.museum/mathematik-doppelpendel

11 SURFER

Mit SURFER erleben Sie den Zusammenhang zwischen Formeln und Formen. Aus einfachen Gleichungen entstehen Bilder, algebraische Flächen im dreidimensionalen Raum. Mathematisch gesprochen ist SURFER ein Programm zur Visualisierung reeller algebraischer Geometrie. Die Flächen stellen die reellen Lösungen polynomialer Gleichungen mit drei Variablen dar.



$x^2+y^2-z^2=0$



$x^3+x^2z^2-y^2=0$

Aktivitäten

Geben Sie unten links ein Polynom mit drei Variablen x, y und z ein. Die Variablen dürfen addiert und multipliziert werden. Auch Klammern dürfen nach den Regeln der Mathematik gesetzt werden. Exponenten können Sie mit Hilfe des Zeichens ^ ausdrücken (schreiben Sie zum Beispiel x^2 für x^2).

Falls Ihre Eingabe kein gültiges Polynom darstellt erscheint daneben ein rotes Ausrufezeichen. Nicht erlaubt sind zum Beispiel „nicht-algebraische" Ausdrücke der Form 2^x, logarithmische oder trigonometrische Funktionen.

SURFER berechnet die zu Ihrem Polynom gehörende Fläche und zeigt sie auf dem Bildschirm an. Indem Sie mit dem Finger darüber fahren, können Sie die Fläche drehen und von allen Seiten betrachten. Da sich solche Flächen häufig bis ins Unendliche ausdehnen, zeigt SURFER nur einen bestimmten, kugelförmigen Ausschnitt der Fläche an. Mit dem Zoom-Balken am rechten Rand des Anzeigefensters können Sie diesen Ausschnitt vergrößern und verkleinern. Mit Hilfe des Menüpunkts „Farben" können Sie der Außen- und Innenseite der Fläche verschiedene Farben zuweisen.

Welche Formel passt dazu? Dieser Löffel wurde 2008 von Valentina Galata mit Hilfe von Surfer erzeugt.

Bei der Eingabe der Gleichung können Sie außerdem bis zu zwei Parameter a und b verwenden (z.B. $ax^2+by^2-3z^2$). Es erscheint dann für jeden Parameter ein Schiebebalken, mit dem Sie den Wert des Parameters zwischen 0 und 1 verändern können.

Unter dem Menüpunkt „Galerie" finden Sie eine große Auswahl an Flächen, die Sie betrachten oder als Ausgangspunkt für eigene Flächen verwenden können. Für viele Flächen gibt es unter dem Menüpunkt „Info" zusätzliche Informationen.

Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Polynomen. Untersuchen Sie, welche Änderungen des Polynoms bestimmte Änderungen in der Fläche bewirken. Oder überlegen Sie sich vorher, was für ein Bild Sie erzeugen möchten und versuchen Sie das passende Polynom dazu einzugeben. SURFER setzt Ihrer Fantasie keine Grenzen.

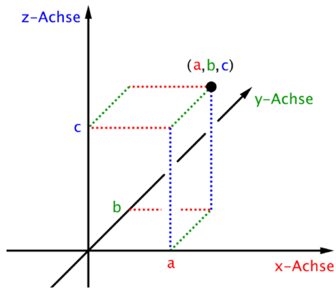
Die Mathematik dahinter

Die algebraische Geometrie befasst sich mit dem Wechselspiel zwischen der Algebra, also den Formeln, und der Geometrie, den dazugehörigen Formen.

Eine Formel ist hier nichts anderes als eine polynomiale Gleichung mit den drei Variablen x, y, und z, zum Beispiel $x^2+y^2-z^2 = 0$. Polynomial bedeutet, dass auf der linken Seite der Gleichung ein Polynom steht. Ein Polynom ist eine Summe aus Vielfachen von Potenzen von Variablen, wobei die Exponenten natürliche Zahlen sind.

Die Lösungen der Gleichung $x^2+y^2-z^2 = 0$ sind alle Tripel (x, y, z) von Zahlen, für die die linke Seite der Gleichung 0 ergibt. Das Tripel (3, 4, 5) ist zum Beispiel eine Lösung der Gleichung, denn $3^2+4^2-5^2 = 0$. Man sagt (3, 4, 5) ist eine „Nullstelle" des Polynoms $x^2+y^2-z^2$.

Solche Tripel von Zahlen können als Koordinaten von Punkten im dreidimensionalen Raum aufgefasst werden. Der dreidimensionale Raum ist der physische Raum, der uns umgibt und in dem wir uns bewegen. Durch die Wahl von drei senkrecht aufeinanderstehenden Koordinatenachsen werden ein Ursprung 0 sowie drei Richtungen x, y und z festgelegt. Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum kann nun eindeutig durch die Angabe von drei Zahlen für x, y und z bestimmt werden.



Mit dieser Überlegung lassen sich die Lösungen von Gleichungen mit drei Variablen als Punkte im Raum darstellen. Lässt man als mögliche Lösungen alle Tripel aus reellen Zahlen zu, so ergeben alle Lösungen oder Punkte gemeinsam eine zusammenhängende Fläche. Eine algebraische Fläche visualisiert also die reelle Lösungsmenge einer polynomialen Gleichung mit drei Variablen.

Die algraische Geometrie kann noch viel mehr als schöne visuelle Gebilde zu erzeugen. Die Idee, algebraische Probleme geometrisch zu betrachten und umgekehrt hilft in vielen Gebieten der Mathematik bei der Beantwortung wichtiger Fragestellungen. Eines der berühmtesten Probleme der Mathematik, der Beweis des großen Fermatschen Satzes aus dem 17. Jahrhundert, wurde 1993/1994 von Andrew Wiles mit Methoden der abstrakten algebraischen Geometrie gelöst. Zuvor hatte unter anderem Alexander Grothendieck auf diesem Gebiet entscheidende Fortschritte erzielt.

Weitere Anwendungen der algebraischen Geometrie finden sich in der Computergrafik und in der theoretischen Physik.

Danksagung

SURFER ist ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach und der Technischen Universität Kaiserslautern. Es basiert auf dem Program Surf von Dr. Stephan Endrass und anderen (surf.sourceforge.net). Surfer wurde unter der Leitung von Prof. Dr. Dr. Gert-Martin Greuel von Dr. Andreas Daniel Matt, Dr. Henning Meyer, Dr. Christian Stussak, Dr. Oliver Labs, Prof. Dr. Herwig Hauser und Felix Riemann erstellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-surfer

12 Bildergalerie

Genießen Sie auf der Galerie eine Auswahl der besten Bilder der Wanderausstellung IMAGINARY, die von verschiedenen Mathematikern und Visualisierungskünstlern erstellt wurden.

Dr. Aurélien Alvarez forscht an der Université d'Orléans. Sein Interesse liegt vor allem in der Geometrie. Seine Hauptforschungsthemen sind ergodische und geometrische Gruppentheorie. Zusammen mit Étienne Ghys und Jos Leys arbeitete er an der Realisierung von „Dimensions", einem Film über Dimensionen, von der stereografischen Projektion und dem Polyeder im 4-dimensionalen Raum bis zu den komplexen Zahlen und der Hopfschen Faserung.

Luc Benard, ein Kanadier aus Montreal, arbeitete als Filmtechniker, Kameramann, Audio-Ingenieur und ist im Moment im Videoschnitt tätig. Mit der zunehmenden Entwicklung der Computer begann er Fraktale als Ausgangspunkt für sein visuelles Schaffen zu verwenden. In den letzten Jahren arbeitete er mit 3D-Bildern und versuchte Wissenschaft und Kunst in seinen visuellen Kompositionen zu vereinen.

Prof. Dr. Étienne Ghys ist Direktor des CNRS (Centre Nationale de la Recherche Scientifique) und arbeitet am Institut für Mathematik der Ecole Normale Supérieure in Lyon. Er hielt den Eröffnungsvortrag zum Thema „Knoten und Dynamik“ beim Internationalen Mathematik Kongress in Madrid 2006. Bilder dieses Vortrages wurden gemeinsam mit Jos Leys erstellt. Leys, Alvarez und Ghys arbeiteten außerdem gemeinsam an einer Serie von DVDs zur mathematischen Visualisierung. Teile der ersten DVD (Film Dimensions) und Bilder daraus sind bei IMAGINARY zu sehen.

Prof. Dr. Herwig Hauser ist Professor für algebraische Geometrie und Singularitätentheorie am Institut für Mathematik der Universität Wien. Er arbeitet seit Jahren an Visualisierungen, Filmen und Büchern für ein breites Publikum. Gemeinsam mit seiner Gruppe veranstaltete er Ausstellungen und Vorträge zur algebraischen Visualisierung, u.a. wurde sein Film Zero Set beim Internationalen Mathematik Kongress 2006 in Madrid gezeigt.

Dr. Oliver Labs ist Mathematiker an der Universität des Saarlandes. Seine Forschungsschwerpunkte sind die algorithmische algebraische Geometrie und Singularitätentheorie, sowie deren Anwendungen. Insbesondere beschäftigt sich Oliver Labs seit Jahren mit der Konstruktion und Visualisierung singulärer algebraischer Flächen. Er hat gemeinsam mit Coautoren bereits mehrere Computerprogramme zu diesem Thema entwickelt, z.B. Surfex und Surfer.

Jos Leys ist Diplom-Ingenieur. Er hatte schon immer großes Interesse an der Mathematik. Seine Leidenschaft gilt vor allem der Erstellung mathematischer Bilder. Er koordiniert unter anderem die

Webseite „Mathematical Imagery“, www.josleys.com, und gewann damit verschiedene Preise.

Prof. Dr. Richard Palais, Professor Emeritus der Brandeis Universität, ist ein bekannter Mathematiker und begann früh, im Gebiet der mathematischen Visualisierung zu arbeiten. Er leitet ein internationales Team, das 3DXM Konsortium, und ist Chef-Architekt und Programmierer der Software 3D-XplorMath. Zur Zeit ist er am Institut für Mathematik der Universität Irvine in Kalifornien tätig und arbeitet zusammen mit Luc Benard und anderen Mitgliedern des Konsortiums an der Erstellung eines virtuellen Mathematik Museums.

Prof. Dr. Ulrich Pinkall studierte Mathematik an der Universität Freiburg, wo er 1982 promovierte. Seit 1986 ist er Professor für Differentialgeometrie und Visualisierung an der TU Berlin. Er war von 1992 bis 2003 Sprecher des Sonderforschungsbereichs „Differentialgeometrie und Quantenphysik“. Seit 2004 leitet er zusammen mit John Sullivan die Arbeitsgruppe „Mathematische Visualisierung” an der TU Berlin, die auch Teil des DFG Forschungszentrums Matheon ist.

Uli Gaenshirt ist selbständiger Bildhauer in Nürnberg. Er beschäftigt sich mit mathematischen Strukturen in der Kunst, seit 2001 insbesondere mit der Mathematik aperiodischer Systeme und quasikristalliner Strukturen. Erste Ausstellungen führte er in den Jahren 2008 bis 2011 in Zusammenarbeit mit dem KOMM-Bildungsbereich in Nürnberg durch. Seine hier gezeigten Ornamente schaffen auf künstlerische Weise einen Zugang zur besonderen Geometrie der Quasikristalle.

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Mitglied der
Leibniz-Gemeinschaft

IMAGINARY
open mathematics

Herausgeber:

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Schwarzwaldstr. 9-11
77709 Oberwolfach

+49 (0) 7834 979 0

www.mfo.de
www.mima.museum

September 2016